

CAPÍTULO 4

- ▣ La idea del capítulo 4 salió de la tesis de maestría de mi alumna **Janine du Plessis**, de la Universidad Estatal de Georgia, que se titulaba
- ▣ **GRUPOS DE TRANSFORMACIÓN Y DUALIDAD EN EL ANÁLISIS DE LAS ESTRUCTURAS MUSICALES.**

A sabiendas que el primer contacto de un lector potencial sería con el resumen (“abstract”) de su tesis, éste se desarrolló con el propósito de:

- ▣ **Dar a entender al posible lector que hay una manera alternativa de relacionar la Matemática y la Música.**
1. Tradicionalmente, el estudio de los intervalos entre tonos se hacía usando las **razones de frecuencia de las potencias de enteros pequeños.**
 2. La Teoría Matemática de la Música moderna ofrece otra manera de entender el sistema de tonos, por medio de considerar los intervalos como transformaciones.

3. Aprovechar el surgimiento histórico de las estructuras algebraicas en la musicología y, en el espíritu de la *Teoría Transformacional*, concentrarse en las operaciones que forman grupos matemáticos.
4. Explorar y desarrollar aspectos de la Teoría Neo-Riemanniana, en particular los grupos T/I y PLR como duales (idea surgida del artículo **Musical Actions of Dihedral Groups** por Crans, Fiore y Satyendra, disponible en los ArXiv).

5. Presentar las herramientas teóricas de la Teoría de Grupos para el análisis musical y, sobre todo, aportar pruebas detalladas de muchas afirmaciones que son propuestas y usadas, pero rara vez demostradas.

Este último punto detonó la idea de aumentar y realzar el libro de texto de Teoría de Grupos del Dr. Lluís Puebla, para incluir ejemplos de aplicaciones musicales en los primeros tres capítulos, así como un cuarto capítulo.

- ▣ En el cuarto capítulo, de una forma suave y “amigable”, se explicarían algunos aspectos básicos de la Teoría Matemática de la Música;
- ▣ En el proceso, se darían elementos a lectores de diversos antecedentes, tanto en la Matemática como en la Música.

- ▣ Los ejemplos del cuarto capítulo siguen de algunos de los aspectos teóricos sobresalientes de los capítulos previos;
- ▣ los objetos y términos musicales son introducidos conforme se vayan necesitando para que un lector sin formación musical pueda entender la esencia de cómo la Teoría de Grupos es empleada para explicar ciertas relaciones musicales ya establecidas.
- ▣ Asimismo, para el lector con conocimiento de la Teoría Musical, este capítulo provee elementos concretos, así como motivación, para comenzar a comprender la Teoría de Grupos.

- ▣ En términos de antecedentes, podríamos mencionar los **textos de Análisis Postonal**, por ejemplo, usados en los Departamentos de Música en que, como en toda aplicación, la Teoría de Grupos es presente de forma implícita.
- ▣ El clásico **The Fascination of Groups** por **Budden**, que aporta ejemplos musicales y de campanología, junto con ejercicios, pero de ninguna manera, como él bien lo dice en el prefacio, pretende ser formal.
- ▣ El capítulo sobre Simetrías en la Música en **Mathematics a Musical Offering** por **Benson**, también ofrece un hermoso panorama de aplicaciones y excelentes ejercicios.

Lo que distingue el capítulo cuatro de este texto es que:

- ▣ Pretende tomar algunas de las nociones fundamentales de la **Teoría de Grupos**, presentadas de manera formal in los primeros tres capítulos y ver como ciertas relaciones musicales preestablecidas pueden ser explicadas en estos términos.
- ▣ Se emplean algunos de los aspectos de la **Teoría Transformacional y Neo-Riemannina** que han surgido en los últimos 30 años de trabajo académico sobre la Teoría Matemática de la Música, dándoles un trato más formal que lo que permite la naturaleza de esos otros trabajos sobre el tema.

- ▣ Los **ejercicios** piden mucho detalle, se dan pistas y las respuestas completas están disponibles.

De hecho, muchos de los ejercicios consisten en:

- ▣ **Completar demostraciones**, para asegurar que las sutilezas y detalles sean captados;
- ▣ **Reforzar cuestiones de notación y simbología que son particulares a la Teoría Matemática de la Música**, para que lleguen a ser naturales para aquellos estudiantes interesados en continuar esta línea de estudio.

El capítulo cuatro, de alguna forma, cuenta una historia.

- ▣ La primera sección, Antecedentes Musicales, plantea la relación entre el estudio de las frecuencias de los tonos y el estudio de tonos desde la perspectiva de la estructura.
- ▣ Se introduce la notación usada en la Teoría Matemática de la Música;
- ▣ Se relaciona esta notación con los conceptos básicos de la Música para él que sólo tiene el conocimiento matemático, o los conceptos básicos de la Teoría de Grupos para los músicos (escala cromática $-\mathbb{Z}_{12}$; definición formal de acorde como un subconjunto del conjunto potencia de \mathbb{Z}_{12} , etc.)

En la segunda sección:

- ▣ Se estudian las transformaciones “T” (transposición) e “I” (inversión) y se definen en términos matemáticos formales;
- ▣ Se ofrecen representaciones geométricas;
- ▣ Se exploran y se prueban proposiciones sobre las relaciones entre T e I como objetos matemáticos, hasta llegar al “clímax”, donde:
- ▣ Se demuestra formalmente que el “conjunto” de estas 24 transformaciones de hecho forma un grupo de transformaciones bajo composición.

En la tercera sección

- ▣ Se hace lo mismo con las transformaciones “P” (paralela), “L” (intercambio de la séptima) and “R” (relativa).
- ▣ Se definen estas transformaciones matemáticamente;
- ▣ Se ofrece otro tipo de representación geométrica (el *Tonnetz*, muy particular a la Teoría Neo-Riemanniana);
- ▣ Se analizan las relaciones entre las transformaciones P, L y R y se prueban proposiciones hasta llegar al teorema en que se demuestra que también, vistas como objetos, forman un grupo bajo composición.

- ▣ En la sección 4.4 se construye un isomorfismo entre los grupos T_I y PLR ;
- ▣ En la sección 4.5, se ve que estos dos grupos son duales, eso es, cada uno es el centralizador del otro como subgrupos del grupo de simetrías del conjunto de los 24 acordes mayores y menores.
- ▣ Se aportan unos ejemplos musicales donde se puede comprobar la dualidad.

- ▣ Este capítulo está basado en el artículo de Crans, Fiore y Santyedra y en la tesis de maestría de Janine du Plessis.
- ▣ Una aportación muy importante de la Srta. du Plessis fue **la formalización con sumo detalle de los aspectos mencionados.**
- ▣ **Esta formalización se traslada al carácter de los ejercicios.** A la misma vez, los ejercicios son razonables y formulados en términos pedagógicos.